

الفصل الرابع

نظرية الاحتمالات Probability Theory





رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

الاحتمالات Probability

الدرس الأول

- أتعرف المفاهيم والمصطلحات الأساسية في الاحتمال.
- أحسب الاحتمال في التجارب العشوائية.

في هذا
الدرس



لماذا نحتاج الاحتمالات في حياتنا اليومية؟



تعد الاحتمالات من العلوم المستخدمة في الحياة اليومية على نطاق واسع، حيث نتعرض للعديد من المواقف المحيرة، والعديد من الخيارات التي نريد تحديد الخيار الأفضل منها، فعلى سبيل المثال؛ لو أرادت وزارة التعليم إنشاء عدد من المدارس في إحدى المدن، فلا بد أن تأخذ في الاعتبار إمكانية استيعاب الزيادة في عدد الطلاب وعدد المعلمين.

يُعتمد في عملية اتخاذ القرارات إلى حد كبير، سواءً كانت قرارات فردية أم جماعية على الاحتمالات للظواهر التي من المتوقع حدوثها أو عدم حدوثها؛ ومن هنا يجدر بالذكر أن النظريات والطرق الإحصائية مرتبطة ارتباطاً قوياً بالاحتمالات، لذا نجد علم الاحتمالات متداخلاً بشكل كبير مع علم الإحصاء؛ فمثلاً يعتمد التنبؤ بالأحوال الجوية وباحتمال حدوثها على معلومات إحصائية سابقة عن الطقس وتتبع الجو لفترة زمنية ما.



يعد علم الاحتمالات أحد فروع الرياضيات التطبيقية؛ الذي يهتم بدراسة فرصة حدوث ظاهرة معينة، على سبيل المثال: عند إلقاء قطعة نقود معدنية يظهر لنا أحد الحدين: صورة أو كتابة، ولكن لا يمكن التأكيد ما هو الحدث الذي سيظهر منهما، فهنا يمكن القول بأن هناك فرصة لظهور الصورة بنسبة 50% أو أن فرصة ظهور الكتابة أيضاً 50%. من هذا المثال يمكن التمييز بين لفظي "مؤكد" و"فرصة" فالأول يدل على شيء نعلم كل الظروف التي تؤدي إلى حدوثه، بينما الثاني يدل على شيء لا نعلم تماماً كل الظروف التي تؤدي إلى حدوثه.

لاحظ:

إن لفظ (فرصة) يحمل المعنى نفسه للفظ (احتمال)، إلا أن (احتمال) هي الكلمة الأكثر شيوعاً في حياتنا اليومية والتي نستخدمها دائماً عندما نعبر عن أي شيء من المتوقع حدوثه.



إثراء

تاريخ علم الاحتمالات

تاريخ نشوء علم الاحتمالات قديم منذ قدم البشرية، حيث ظهرت إشارات دالة على ذلك لدى اليونانيين والرومان، كما قدم المسلمون إسهامات مميزة في ذلك، ثم تلاحت أعمال العالم باسكال Pascal، وتبعه جيمس برنولي James Bernoulli بنظريته الشهيرة. وقد قدمت التقنية خدمات جليلة لتطوير هذا العلم؛ من حيث توفير الوقت والجهد لإجراء حسابات الاحتمال المعقدة والدقيقة.

سبق أن درست في الفصل الثالث التجربة العشوائية، التي وصفت بأنها: أي عملية يتم من خلالها الحصول على نتائج سواء كانت أرقامًا أم قياسات أم استجابات. بحيث إن النتائج الممكنة لهذه العملية معلومة مسبقًا. وتسمى مجموعة جميع النتائج الممكنة لتجربة عشوائية فضاء العينة ويرمز لها بالرمز S . والآن ستحسب احتمال كل نتيجة (حادثة) في هذه التجربة.

الاحتمال (Probability):

هو قياس إمكانية ظهور حادثة ما في تجربة عشوائية. ويرمز له عادة بالرمز $P(A)$ ، حيث يقاس احتمال ظهورها باستخدام الصيغة الآتية:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{عدد عناصر الحادثة } A}{\text{عدد عناصر فضاء العينة } S}$$

مسلّمات الاحتمال (Probability Axioms):

- تتراوح قيمة الاحتمال لأي حادثة بين الصفر والواحد ويُعبر عن ذلك بـ: $0 \leq P(A) \leq 1$ ، حيث يشير الصفر إلى حادثة مستحيلة ويشير الواحد إلى حادثة مؤكدة.
- كلما زادت قيمة احتمال الحادثة، زاد احتمال وقوع تلك الحادثة.

مثال 1

في تجربة رمي حجر النرد مرة واحدة، احسب احتمال ظهور الحوادث الآتية:

- ظهور عدد فردي.
- ظهور عدد يقبل القسمة على 2.
- ظهور عدد أقل من ستة.
- ظهور العدد ستة.
- ظهور العدد سبعة.
- ظهور عدد أقل من سبعة.

الحل:

بما أن عدد عناصر فضاء العينة هو: $n(S) = 6$ فإن احتمالات ظهور الحوادث هي:

الفقرة	الحادثة	عدد العناصر	الاحتمال
a	$A = \{1, 3, 5\}$	$n(A) = 3$	$P(A) = n(A)/n(S) = 3/6 = \frac{1}{2} = 0.5$
b	$B = \{2, 4, 6\}$	$n(B) = 3$	$P(B) = n(B)/n(S) = 3/6 = \frac{1}{2} = 0.5$
c	$C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$	$n(C) = 5$	$P(C) = n(C)/n(S) = 5/6 \approx 0.83$
d	$D = \{6\}$	$n(D) = 1$	$P(D) = n(D)/n(S) = 1/6 \approx 0.2$
e	$E = \{\} = \emptyset$	$n(E) = 0$	$P(E) = n(E)/n(S) = 0/6 = 0$
f	$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	$n(S) = 6$	$P(S) = n(S)/n(S) = 6/6 = 1$

تحقق من فهمك 1

في تجربة رمي حجر النرد مرتين وتسجيل الرقم الظاهر على الوجه العلوي في الرمييتين؛ أوجد احتمال ظهور عددين زوجيين.

الحل في الصفحة التالية

في البداية؛ نقوم بتسجيل جميع الاحتمالات الممكنة (التي يطلق عليها فضاء العينة، ويرمز لها بالرمز S) التي تبلغ 36 زوجاً مرتباً.

$S = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}.$

تم تعريف الحدث - الذي يرمز له بالرمز A - بأنه ظهور عددين زوجيين، وهذا يعني جميع العناصر التي يكون فيها الزوج المرتب مكوناً من عددين زوجيين؛ وعليه فان عناصر الحد A هي:

$A = \{(2,2), (2,4), (2,6), (4,2), (4,4), (4,6), (6,2), (6,4), (6,6)\}$

بناءً على جميع ما سبق فإن الإجابة عن احتمال ظهور عددين زوجيين تكون بقسمة عدد الأزواج المرتبة الموجودة في الحدث A على عدد جميع الأزواج المرتبة الموجودة في فضاء العينة وهي:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = 0.75 = 75\%$$

نظرية بيز Bayes's Theorem:



توماس جوشوا بيز عالم رياضيات وإحصائي وفيلسوف ووزير إنجليزي. من أشهر أعماله نظرية بيز في الاحتمالات. ولم ينشر بيز نظريته وإنما عدلت ونشرت بعد وفاته، وقد نتج عنها ما يُعرف بالاستدلال البيزي الذي يعد أحد أسس بناء خوارزميات الذكاء الاصطناعي وعلم الآلة.

تعدّ نظرية بيز من أشهر النظريات في علم الاحتمال، وتبنى عليها العديد من العمليات الإحصائية. حيث تهتم نظرية بيز بحساب احتمال وقوع حدث استناداً إلى معرفة الأسباب والظروف المؤدية لوقوعه. فعلى سبيل المثال عندما نعلم أن من أسباب سقوط الطائرات وجود خلل في المحرك، فإن حساب احتمال سقوط طائرة بعينها يصبح أكثر دقة إذا حسبنا احتمال أن يكون خلل المحرك هو المتسبب في سقوطها.

لابد من التعرف على قانون الاحتمال الكلي قبل دراسة قانون بيز؛ الذي يُعنى بحساب وقوع الحادثة دون النظر إلى مسبباتها.

لتكن $A_1, A_2, \dots, A_n$ حوادث اتحادها يشكل المجموعة الشاملة، ومتنافية متنى متنى (متنافية تبادلياً؛ يعني لا يوجد تقاطع بين أي اثنتين منها) ومعرفة على فضاء العينة S ، أي أن:

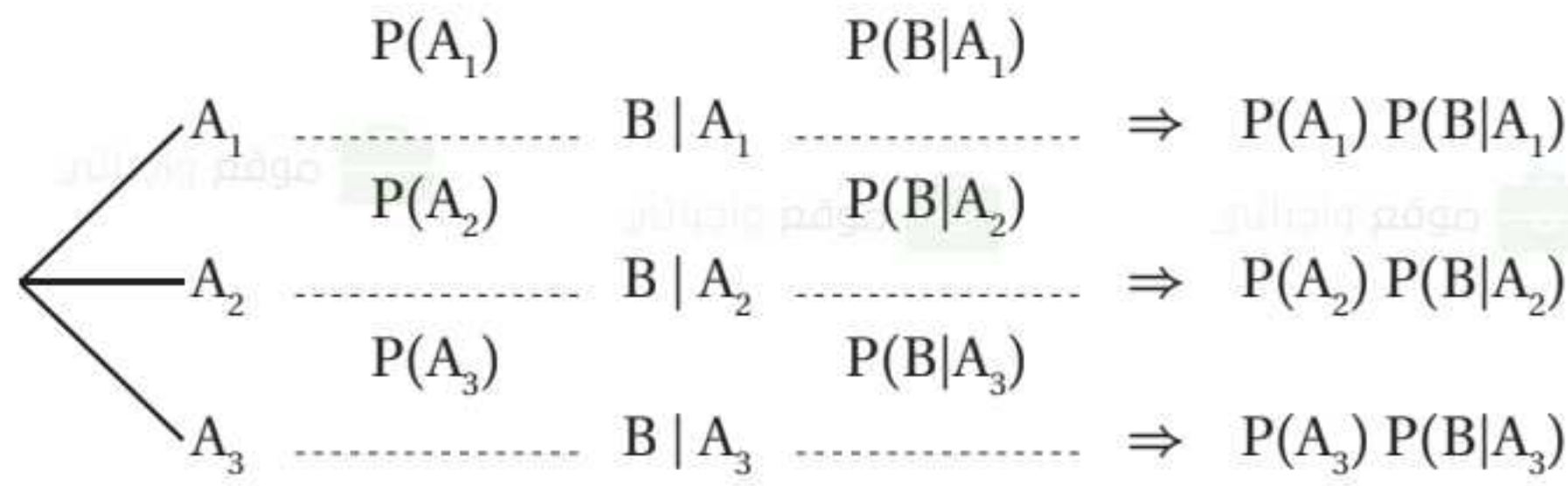
$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = S$$

إذا كانت الحادثة B هي أي حادثة معرفة على فضاء العينة S نفسه، فإن:

أولاً: قانون الاحتمال الكلي (Law of Total Probability):

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1) P(B|A_1) + P(A_2) P(B|A_2) + \dots + P(A_n) P(B|A_n) \\ &= \sum_{k=1}^n P(A_k) P(B|A_k) \end{aligned}$$

ويمكن عرض قانون الاحتمال الكلي بواسطة الرسم الشجري الآتي (للحالة $n=3$ على سبيل المثال):



$$P(B) = \sum_{k=1}^n P(A_k)P(B|A_k)$$

2

مثال



	A_1	A_2	A_3
← غير تالف (G)	G_{A1}	G_{A2}	G_{A3}
← تالف (B)	B_{A3}	B_{A3}	B_{A3}

(A_i) تعني إنتاج الآلة i
 (B_{Ai}) تعني الإنتاج التالف من الآلة i
 (G_{Ai}) تعني الإنتاج غير التالف من الآلة i

يتم إنتاج المصابيح الكهربائية في أحد المصانع بواسطة ثلاث آلات، حيث تنتج الآلة الأولى 20% وتنتج الآلة الثانية 30% وتنتج الآلة الثالثة 50% من الإنتاج الكلي للمصنع، ومعلوم مسبقاً أن نسبة الإنتاج التالف للآلة الأولى 1% ونسبة الإنتاج التالف للآلة الثانية 4% ونسبة الإنتاج التالف للآلة الثالثة 7%. إذا كانت التجربة هي اختيار مصباح واحد من إنتاج هذا المصنع بشكل عشوائي؛ فما احتمال أن يكون هذا المصباح تالفاً؟

الحل:

نعرف الحوادث الآتية:

الحادثة B وتعني إنتاج المصباح التالف.

الحادثة A_1 وتعني إنتاج الآلة الأولى للمصابيح.

الحادثة A_2 وتعني إنتاج الآلة الثانية للمصابيح.

الحادثة A_3 وتعني إنتاج الآلة الثالثة للمصابيح.

ويكون حساب الاحتمال لكل حادثة كما يأتي:

$$P(A_1) = \frac{20}{100} = 0.2;$$

$$P(B|A_1) = \frac{1}{100} = 0.01$$

$$P(A_2) = \frac{30}{100} = 0.3;$$

$$P(B|A_2) = \frac{4}{100} = 0.04$$

$$P(A_3) = \frac{50}{100} = 0.5;$$

$$P(B|A_3) = \frac{7}{100} = 0.07$$

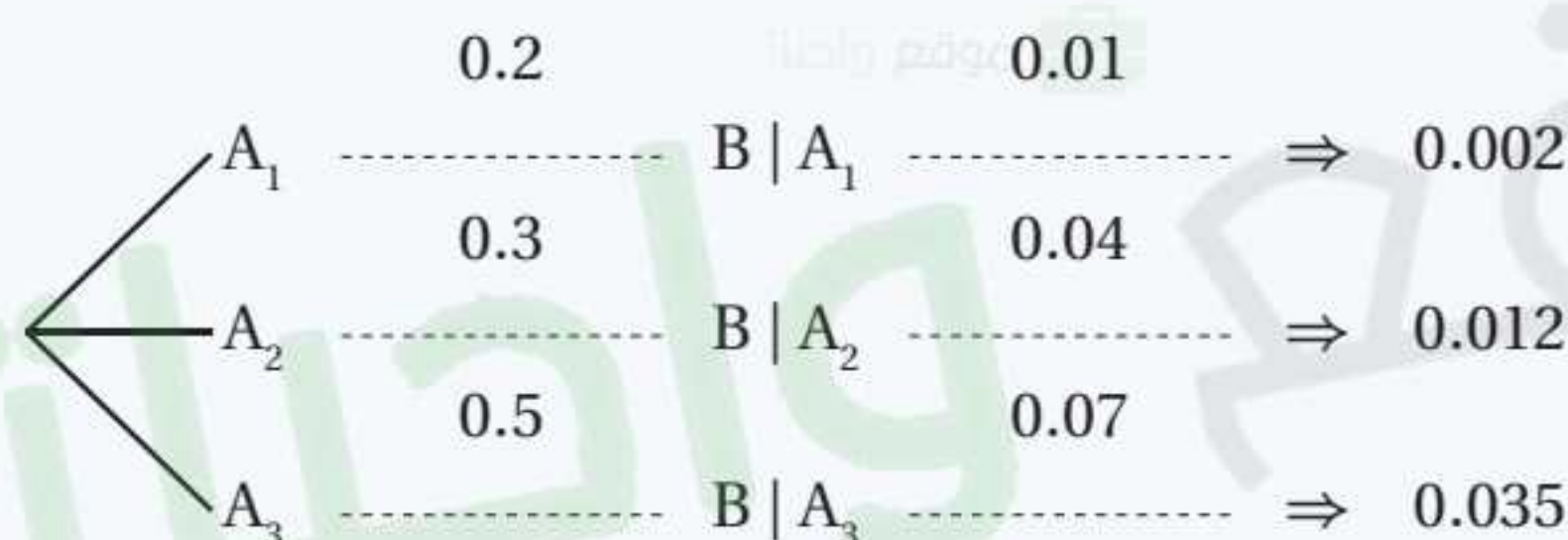
المطلوب إيجاد احتمال أن يكون المصباح تالفًا، أي $P(B)$

$$P(B) = \sum_{k=1}^3 P(A_k) P(B|A_k)$$

$$= P(A_1) P(B|A_1) + P(A_2) P(B|A_2) + P(A_3) P(B|A_3)$$

$$= 0.2 \times 0.01 + 0.3 \times 0.04 + 0.5 \times 0.07 = 0.049$$

عرض الحل بالرسم الشجري:



$$\text{المجموع} = P(B) = 0.049$$



تفكير ناقد

ذكر في قانون الاحتمال الكلي الشرط "الحوادث $A_1, A_2, \dots, A_n$ حوادث شاملة ومتنافية
مثنى مثنى". ما أهمية هذا الشرط في تطبيق القانون؟ أعط أمثلة.

تهتم نظرية بيز بحساب احتمال وقوع حدث استناداً إلى معرفة الأسباب والظروف المؤدية لوقوعه، وحتى نضمن إجراء تحليل دقيق للأسباب المؤدية لوقوع الحدث فلا بد من التأكد من عدم تداخل تلك الظروف لئلا يؤدي ذلك إلى تداخل القيم عند تطبيق القانون ؛ وبالتالي عدم التوصل لنتائج دقيقة ، وبالنسبة لكون اتحادها يؤدي للمجموعة الشاملة ، فإن ذلك يرجع إلى أن عدم تكوين المجموعة الشاملة سيعني بالضرورة وجود سبب محتمل لوقوع الحادث لم يؤخذ في الحسبان عند تطبيق القانون ، وبالتالي عدم التوصل لنتائج دقيقة أيضاً.

الحل في الصفحة التالية

تحقق من فهمك 2

1. في مثال (2) السابق؛ ما احتمال أن يكون المصباح غير تالف؟
2. يتم إنتاج قمصان رياضية في أحد المصانع بواسطة أربع آلات، حيث تنتج الآلة الأولى 20% وتنتج الآلة الثانية 30% وتنتج الآلة الثالثة 35% وتنتج الآلة الرابعة 15%، من الإنتاج الكلي للمصنع، ومعلوم مسبقاً أن نسبة الإنتاج التالف للآلة الأولى 2% ونسبة الإنتاج التالف للآلة الثانية 6% ونسبة الإنتاج التالف للآلة الثالثة 9% ونسبة الإنتاج التالف للآلة الرابعة 5%؛ إذا كانت التجربة هي اختيار قميص واحد من إنتاج هذا المصنع بشكل عشوائي؛ فما احتمال أن يكون هذا القميص تالفًا؟

ثانيًا: قانون بيز:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) P(B|A_i)}{\sum_{k=1}^n P(A_k) P(B|A_k)} = \frac{P(A_i) P(B|A_i)}{P(B)}; i = 1, 2, \dots, n$$

مثال 3

بالرجوع إلى مثال (2) وبفرض أن المصباح الذي تم اختياره تالف، فما احتمال:

a. أن يكون أنتج بواسطة الآلة الأولى؟

b. أن يكون أنتج بواسطة الآلة الثانية؟

الحل:

من حل المثال (1):

$$P(B) = 0.49$$

$$P(A_1) P(B|A_1) = 0.002$$

$$P(A_2) P(B|A_2) = 0.012$$

1. في مثال (2) السابق؛ ما احتمال أن يكون المصباح غير تالف؟

من خلال المعلومات التي تم حلها في المثال (2) نستطيع الاستفادة منها هنا؛ بحيث يمكن تطبيق إحدى مسلّمات الاحتمالات التي درسها الطالب في المراحل السابقة؛ وهي احتمال مكملّة أي حدث، وتمثل الواحد ناقص احتمالية الحدث نفسه.

معلومات المثال (2) المهمة في الإجابة على هذا السؤال هي:

احتمال أن يكون المصباح تالفًا، هي $P(B) = 0.049$. عليه فان احتمال أن يكون المصباح غير تالف هي:

$$P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - 0.049 = 0.951$$

2. يتم إنتاج قمصان رياضية في أحد المصانع بواسطة أربع آلات، حيث تنتج الآلة الأولى 20% وتنتج الآلة الثانية 30% وتنتج الآلة الثالثة 35% وتنتج الآلة الرابعة 15%، من الإنتاج الكلي للمصنع، ومعلوم مسبقاً أن نسبة الإنتاج التالف للآلة الأولى 2% ونسبة الإنتاج التالف للآلة الثانية 6% ونسبة الإنتاج التالف للآلة الثالثة 9% ونسبة الإنتاج التالف للآلة الرابعة 5%؛ إذا كانت التجربة هي اختيار قميص واحد من إنتاج هذا المصنع بشكل عشوائي؛ فما احتمال أن يكون هذا القميص تالفاً؟

من أجل تسهيل عملية حل المسألة لابد من تحويل

العبارات إلى صيغ رياضية أو رموز؛ لكي تسهل علينا

عملية فهم المسألة وسرعة التعامل معها، ولذلك نعرّف

الحوادث التالية:

الحادثة B وتعني الإنتاج التالف للآلة.

الحادثة A_1 وتعني إنتاج الآلة الأولى للقمصان الرياضية.

الحادثة A_2 وتعني إنتاج الآلة الثانية للقمصان الرياضية.

الحادثة A_3 وتعني إنتاج الآلة الثالثة للقمصان الرياضية.

الحادثة A_4 وتعني إنتاج الآلة الرابعة للقمصان الرياضية.

تابع حل السؤال في الصفحة التالية

ويكون حساب الاحتمال لكل حادثة كما يأتي:

$$P(A_1) = \frac{20}{100} = 0.2 ; P(B|A_1) = \frac{2}{100} = 0.02$$

$$P(A_2) = \frac{30}{100} = 0.3 ; P(B|A_2) = \frac{6}{100} = 0.06$$

$$P(A_3) = \frac{35}{100} = 0.35 ; P(B|A_3) = \frac{9}{100} = 0.09$$

$$P(A_4) = \frac{15}{100} = 0.15 ; P(B|A_4) = \frac{5}{100} = 0.05$$

المطلوب هو إيجاد احتمال أن يكون القميص تالفًا، أي

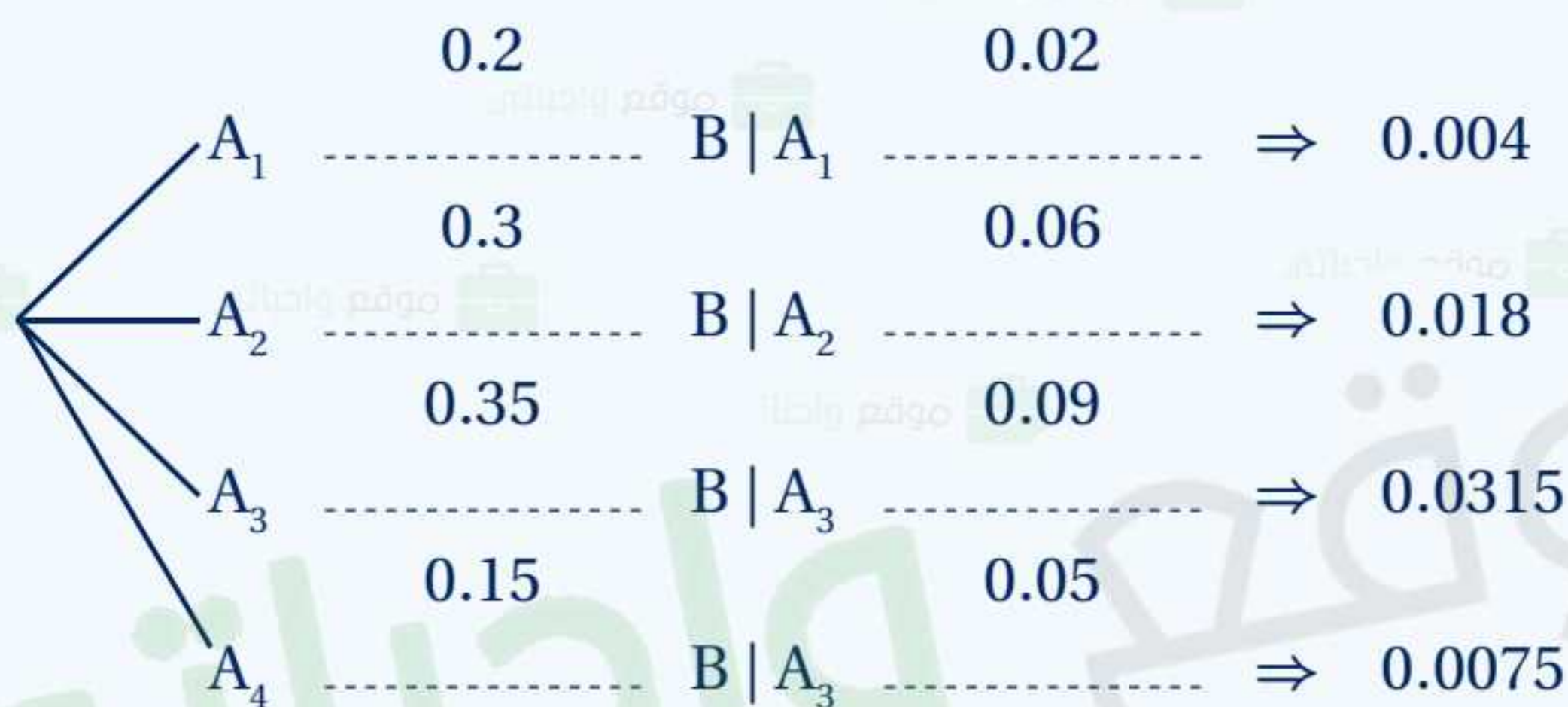
$$P(B) = ??$$

$$P(B) = \sum_{k=1}^3 P(A_k)P(B|A_k)$$

تابع حل السؤال في الصفحة التالية

$$\begin{aligned}
 &= P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3) + P(A_4)P(B|A_4) \\
 &= 0.2 \times 0.02 + 0.3 \times 0.06 + 0.35 \times 0.09 + 0.15 \times 0.05 = 0.061 \\
 &\approx 6.1\%
 \end{aligned}$$

عرض الحل بالرسم الشجري:



$$P(B) = \text{المجموع} = 0.061$$

.a

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1) P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{0.002}{0.049} \approx 0.04$$

.b

$$P(A_2|B) = \frac{P(A_2) P(B|A_2)}{P(B)} = \frac{0.012}{0.049} \approx 0.245$$

نستنتج أنَّ الاحتمال الأكبر أنَّ يكون المصباح التالف من إنتاج الآلة الثانية.

تحقق من فهمك 3

1. بالرجوع إلى مثال (2) وبفرض أن المصباح الذي تم اختياره تالف، فما احتمال أن يكون أنتج بواسطة الآلة الثالثة؟ قارن النتيجة التي توصلت إليها بالنتيجة في المثال (2).
2. قرر أي آلة سيكون احتمال إنتاجها للمصباح التالف الأكبر؟ وأي آلة سيكون احتمال إنتاجها للمصباح التالف الأقل؟

من حل المثال (2):

$$P(B) = 0.049$$

$$P(A_3)P(B|A_3) = 0.035$$

$$P(B|A_3) = \frac{P(A_3)P(B|A_3)}{P(B)} = \frac{0.035}{0.049} = 0.714 \approx 71.4\%$$

نجد بعد المقارنة أن النتيجة التي حصلنا عليها هنا تشكل الاحتمال الأكبر بين الاحتمالين السابقين في المثال (3).

(b) يمكن اتخاذ قرار: إنتاج المصباح التالف سوف يكون من إنتاج الآلة الثالثة، لأنها هي الاحتمال الأكبر بين باقي الاحتمالات. كما نستطيع استنتاج أن إنتاج الآلة الأولى للمصابيح التالفة هو الأقل مقارنة بالآلتين الثانية والثالثة.



رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

التوزيعات الاحتمالية المنفصلة Discrete Probability Distribution

الدرس الثاني

في هذا
الدرس



- أتعرف التوزيعات الاحتمالية المنفصلة (توزيع ذي الحدين، توزيع بواسون)، وأوجدتها، وأفسرها لاتخاذ القرارات المناسبة.
- أحسب الاحتمالات باستخدام توزيع ذي الحدين، وتوزيع بواسون.



فكر سبق وأن درست مفهوم المتغير العشوائي، وأنواعه المتصلة والمنفصلة، وكيفية إيجادها وحساب قيمها من خلال تجربة عشوائية بسيطة. ولكن التجارب العشوائية في الواقع يصعب فيها إيجاد قيم المتغيرات العشوائية وحساب احتمالاتها، فكيف يمكن ذلك؟

يمكن ذلك من خلال التوزيعات الاحتمالية التي لها

تطبيقات متنوعة، منها على سبيل المثال في التعليم: حساب درجات الطلاب، وعدد الأسئلة، وتصنيف مستويات الأداء، والكشف عن الموهوبين، والتنبؤ بالتوجهات والميول العلمية للطلاب وغيرها.

التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (Probability Distribution for a Random Variable):

هو دالة توضح احتمالات قيم المتغير العشوائي المختلفة، ويعبر عنها بجدول أو معادلة رياضية تبين قيم المتغير العشوائي والاحتمالات المقابلة لها.

ويلاحظ أن المتغير العشوائي المنفصل يحتوي على عدد محدود من النتائج المحتملة للتجربة، أما المتغير العشوائي المتصل فيحتوي على عدد غير محدود من تلك النتائج.

التوزيع الاحتمالي المنفصل

التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل X الذي يأخذ القيم $x_1, x_2, \dots, x_n$ ، ولكل X قيمة احتمالية معينة

يرمز لها بالرمز $P(X = x_1), P(X = x_2), \dots, P(X = x_n)$

قراءة الرموز

■ يقرأ الرمز $P(X=1) = 0.05$ احتمال المتغير العشوائي X عندما تكون قيمته 1 يساوي 0.05.

فيقال إن للمتغير العشوائي المنفصل X توزيعاً احتمالياً منفصلاً $P(X = x_i)$ إذا حقق هذا التوزيع الشروط الآتية:

1. $P(X = x_i) \geq 0$ لجميع قيم X ($i = 1, 2, \dots, n$).
2. $\sum P(X = x_i) = 1$ (بمعنى أن مجموع الاحتمالات يساوي واحد).

لاحظ:

- يمكن رسم التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل باستخدام المدرج أو الأعمدة التكرارية.
- يمكن التعامل مع البيانات النوعية بوصفها متغيرات عشوائية منفصلة.
- لا يمكن أن تكون قيمة الاحتمال سالبة أو أكبر من 1.

مثال 1

تحقق من صحة شروط التوزيع الاحتمالي المنفصل فيما يأتي، وإذا تحققت شروط التوزيع فاستخدم التمثيل المناسب لعرض البيانات:

a.

X	0	1	2	3
$P(X = x)$	0.25	0.15	0.30	0.30

b.

X	1	2	3	4
$P(X = x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$	-1

الحل:

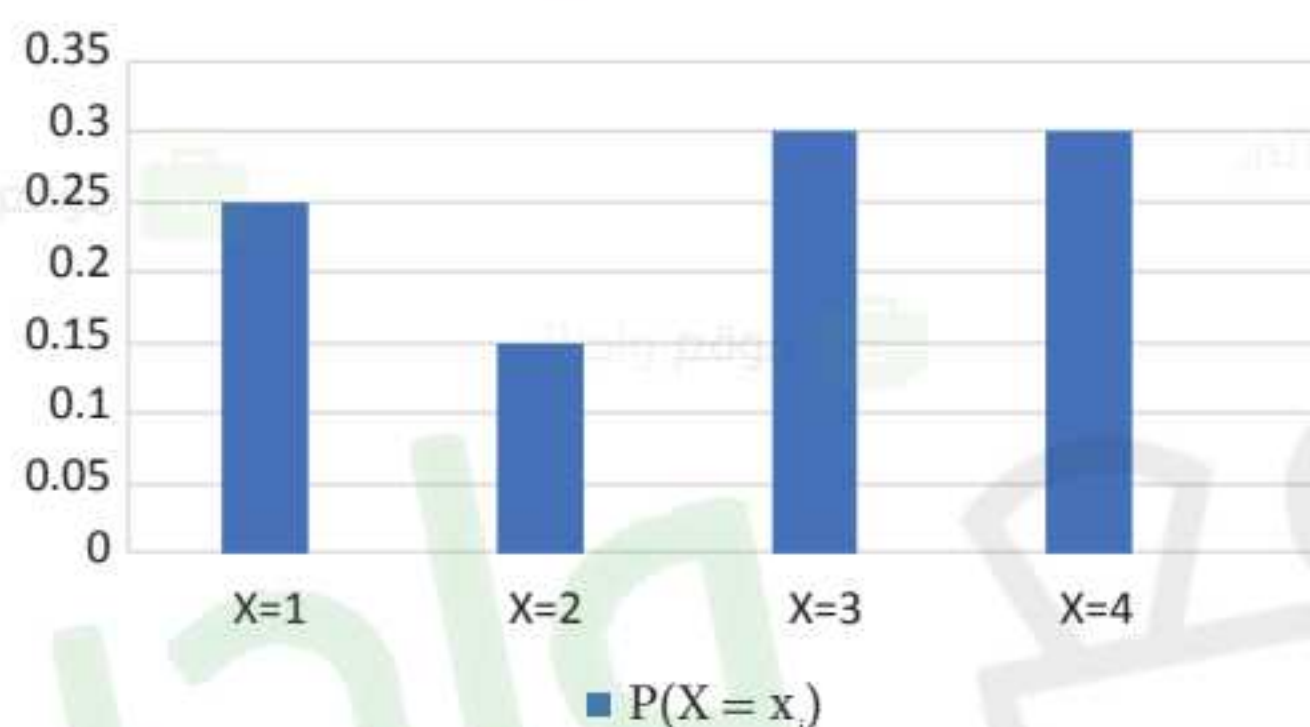
a. الشرط الأول متحقق؛ حيث إن جميع نتائج الاحتمالات أكبر من صفر ($P(X=x_i) \geq 0$) لجميع قيم X .

$$\sum P(X = x_i) = 0.25 + 0.15 + 0.3 + 0.3 = 1$$

b. الشرط الثاني أيضاً متحقق؛ حيث إن مجموع نتائج كل الاحتمالات يساوي 1، ($\sum P(X=x_i) = 1$).

وبما أن الشرطين قد تحققا فيمكن القول بأن هذا التوزيع الاحتمالي هو توزيع احتمالي منفصل.

التمثيل بالأعمدة للتوزيع الاحتمالي المنفصل



يلاحظ أن $P(X=3)$ ، $P(X=4)$ لا تقعان بين 0 و 1؛ لذلك فإن هذا التوزيع ليس توزيعاً احتمالياً، حيث إنه لا يمكن أن تكون نتيجة الاحتمال سالبة أو أكبر من 1، رغم أن مجموع كل الاحتمالات يساوي 1.

الحل في الصفحة التالية

تحقق من فهمك 1

هل التوزيع الاحتمالي الوارد في الجدول الآتي توزيع احتمالي منفصل؟ إذا كان كذلك مثله بيانياً.

X	0	1	2
P(X = x)	0.35	0.15	0.05

من أجل التحقق من أن هذا التوزيع الاحتمالي منفصل لابد من أن نتأكد من تحقق شرطين وهما: الشرط الأول: أن تكون جميع الاحتمالات أكبر من الصفر، والشرط الثاني: أن يكون مجموع جميع الاحتمالات يساوي واحد، وإذا تحقق الشرطان فإنه في هذه الحالة نستطيع القول بأن هذا التوزيع الاحتمالي توزيع منفصل.

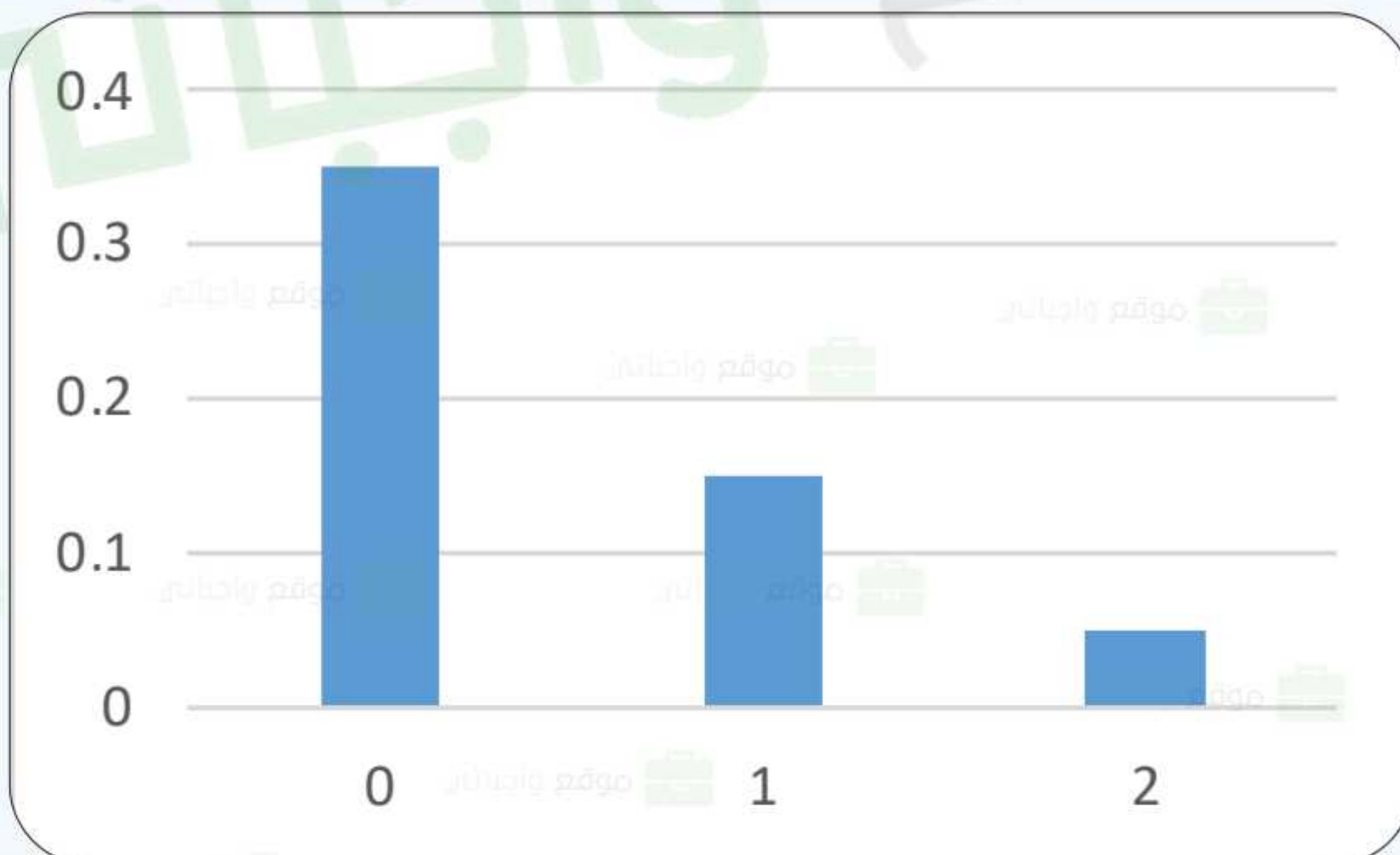
بالنظر إلى البيانات الموجودة في الجدول نجد أن جميع قيم الاحتمالات في الصف الثاني من الجدول أكبر من الصفر، وهذا يعني أن الشرط الأول قد تحقق، لذا ننتقل للتأكد من تحقق الشرط الثاني وهو: أن مجموع الاحتمالات يساوي واحداً، ويمكن التعبير عن هذا العبارة بالصيغة الرياضية الآتية:

$$\begin{aligned}\sum P(X = x_i) &= 1 \\ \sum P(X=x_i) &= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) \\ &= 0.35 + 0.15 + 0.05 = 0.55 < 1\end{aligned}$$

تابع حل السؤال في الصفحة التالية

وحيث إن مجموع الاحتمالات يساوي 55%، أي لا يساوي الواحد، فهذا يعني أن الشرط الثاني غير متحقق، وعليه فإنه ليس توزيعاً احتمالياً منفصلاً.

ويلاحظ أنه يمكن تمثيل التوزيع بيانياً، لأن التمثيل البيانى لا يعني أنه يجب أن يكون توزيع احتمالي لتمثيله، ولكن يتم التعامل معه كبيانات يتم رسمها كما تعلمنا في الفصل الثاني من هذا الكتاب.



وبالإضافة إلى التعبير عن التوزيع الاحتمالي باستخدام الجدول؛ يمكن أيضاً التعبير عنه باستخدام معادلة، كما في توزيع ذي الحدين وتوزيع بواسون.

توزيع ذي الحدين (Binomial Distribution):

إذا كان لدينا تجربة ما تتكرر n مرة (بفرصتين نجاح وفشل)، وكان احتمال ظهور حدث ما (X) وليكن (النجاح) هو p ، واحتمال عدم ظهور هذا الحدث (الفشل) هو q ، فإن احتمال ظهور الحدث (X) من بين التكرارات n ، يتبع توزيع ذي الحدين الذي دالته الاحتمالية (وتسمى بدالة الكتلة الاحتمالية) تعطى بالمعادلة الآتية:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} ; X = 0, 1, 2, \dots, n$$

من خصائص توزيع ذي الحدين:

• المتوسط الحسابي $\mu = np$ والتباين $\sigma^2 = npq$.

• $p + q = 1$.

لاحظ:

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x! (n-x)!}$$

$$n! = (n)(n-1)(n-2) \dots (1)$$

الحل في الصفحة التالية

إذا كانت نسبة النجاح في تجربة 76% وكانت نسبة الفشل 21%، فهل تخضع هذه التجربة للتوزيع الاحتمالي ذي الحدين؟ فسر إجابتك.



تفكير ناقد

مثال 2



في تجربة رمي قطعة نقود معدنية 3 مرات، إذا كان المتغير العشوائي X يمثل عدد مرات ظهور الصورة، فأوجد دالة توزيع ذي الحدين للتجربة، ثم احسب المتوسط الحسابي والتباين للمتغير العشوائي X . واحسب احتمال ظهور صورتين.

الحل:

باستخدام دالة الكتلة الاحتمالية لتوزيع ذي الحدين:

$$P(X = i) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} ; X = 0, 1, 2, \dots, n$$



تفكير ناقد

إذا كانت نسبة النجاح في تجربة 76% وكانت نسبة الفشل 21%، فهل تخضع هذه التجربة للتوزيع الاحتمالي ذي الحدين؟ فسر إجابتك.

لا تخضع هذه التجربة لتوزيع ذي الحدين، والذي يفترض خضوع التجربة لفرصتين متضادتين.

وبحساب الاحتمال الكلي $100\% \neq 97\% = 21 + 76$

وهو ما يخالف الخاصية الثانية من خصائص توزيع ذي الحدين.

المتغير العشوائي X = عدد مرات ظهور الصورة $n = 3$, $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$

$$P(X = x) = \binom{3}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{3-x}; X = 0, 1, 2, 3$$

وعليه يكون المتوسط الحسابي:

$$\mu = np = 3 \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

ويكون التباين:

$$\sigma^2 = npq = (3) \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

ويكون احتمال ظهور صورتين ويعني $X=2$ ، يساوي:

$$P(X = 2) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{3-2} = (3) \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}$$

لاحظ:

$$0! = 1$$

$${}_nC_0 = \frac{n!}{(n-0)!0!} = \frac{1}{1} = 1$$

$${}_nC_n = 1$$

$${}_nC_n = \frac{n!}{(n-n)!n!} = \frac{1}{1} = 1$$

الحل في الصفحة التالية

تحقق من فهمك 2

إذا كان 40% من طلاب إحدى المدارس لا يملكون سيارات، وأخذت عينة عشوائية حجمها 8 طلاب من هذه المدرسة. أوجد دالة التوزيع الاحتمالي والمتوسط الحسابي والتباين للمتغير العشوائي X باستخدام دالة الاحتمال لتوزيع ذي الحدين؛ وأوجد احتمال ألا يمتلك 4 منهم سيارات.

توزيع بواسون (Poisson Distribution):



سيمون بواسون Poisson عالم فرنسي، كانت له جهود بارزة في علم الاحتمالات، أشهرها التوزيع المعروف

باسمه «قانون توزيع بواسون»، ولهذا التوزيع تطبيقات مهمة في تحليل مسائل تتعلق بالنشاط الإشعاعي والكيمياء والفيزياء، كما أنه ذو أهمية كبيرة في التنظيمات الإدارية والمالية.

توزيع احتمالي منفصل يُستخدم في حالة الحوادث المستقلة، ويهتم بحساب الاحتمالات للحوادث النادرة، مثل: حرائق المدارس في إحدى المدن، الحوادث المرورية على طريق محدد، الأخطاء المطبعية في إحدى صفحات كتاب، ونحو ذلك، فإذا كانت (X) ترمز لعدد مرات ظهور حادثة نادرة فإن الدالة الاحتمالية لتوزيع بواسون تعطى بالمعادلة الآتية:

لحل هذا السؤال لابد من إعادة تعريف توزيع ذي الحدين، وأنه يعتمد على فرصتين فقط وعدد من المحاولات التي تُرصد فيها مرات النجاح أو مرات الفشل. وعليه فإن نتائج المتغير في هذه التجربة تتبع توزيع ذي الحدين باحتمالية يرمز لها P وعدد محاولات يرمز له بـ n .

ومن خلال المعلومات المعطاة في المثال فإن $P = 0.4$ و $n = 8$ وعليه يمكن القول بأن المتغير العشوائي يتبع توزيع ذي الحدين باحتمالية 0.4 وعدد محاولات 8.

باستخدام دالة الكتلة الاحتمالية لتوزيع ذي الحدين:

$$P(X = x_i) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} ; x = 0, 1, 2, \dots, n$$

المتغير العشوائي X = نسبة طلاب أحد المدارس الذين لا

يملكون سيارات. $P = 0.4, q = 0.6, n = 8$

$$P(X = x) = \binom{8}{x} (0.4)^x (0.6)^{8-x} ; x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.$$

تابع حل السؤال في الصفحة التالية

وعليه يكون المتوسط الحسابي:

$$\mu = np = 8(0.4) = 3.2$$

ويكون التباين:

$$\sigma^2 = npq = (8)(0.4)(0.6) = 1.92$$

ويكون احتمال ألا يمتلك 4 منهم سيارات ويعني $X = 4$,

يساوي:

$$\begin{aligned} P(X=4) &= \binom{8}{4} (0.4)^4 (0.6)^{8-4} = \\ &= \frac{8!}{4!(8-4)!} (0.4)^4 (0.6)^4 = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{(4 \times 3 \times 2 \times 1)4!} (0.4)^4 (0.6)^4 \\ &= (7 \times 2 \times 5) (0.4)^4 (0.6)^4 \\ &= (70)(0.0256)(0.1296) \approx 0.232 \approx 23.2\% \end{aligned}$$

$$P(X = x_i) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}; X = 0, 1, 2, \dots$$

حيث أن $e \approx 2.7$ مقدار ثابت، و λ هي المتوسط الحسابي لتوزيع بواسون.

ومن أهم خصائص توزيع بواسون أن المتوسط الحسابي = التباين = λ .

مثال 3

إذا كان المتوسط الحسابي لعدد الأخطاء المطبعية في إحدى صفحات كتاب هو 3 أخطاء، فاحسب:

a. احتمال عدم حدوث أي خطأ.

b. احتمال حدوث خطأين.

الحل:

حيث إن المتوسط الحسابي للأخطاء المطبعية في إحدى صفحات الكتاب هو 3 أخطاء، فإن $\lambda = 3$.

ليكن X (الحدث): عدد الأخطاء المطبعية.

X متغير عشوائي منفصل يأخذ القيم $0, 1, 2, \dots$ ويتبع توزيع بواسون الذي دالته الاحتمالية تعطى بالمعادلة

$$P(X = x_i) = \frac{e^{-3} 3^x}{x!}; X = 0, 1, 2, \dots$$

a. احتمال عدم حدوث أي خطأ $X=0$

$$P(X = 0) = \frac{e^{-3} 3^0}{0!} = 0.05$$

b. احتمال حدوث خطأين $X=2$

$$P(X = 2) = \frac{e^{-3} 3^2}{2!} = \frac{0.05 \times 9}{2 \times 1} = 0.225$$

الحل في الصفحة التالية

تحقق من فهمك 3

في مثال (3) السابق؛ احسب احتمال حدوث أربعة أخطاء.

من المعلومات الموجودة في المثال (3) وهي كالآتي:

X متغير عشوائي منفصل يأخذ القيم $0, 1, 2, \dots$ ، ويتبع توزيع بواسون الذي دالته الاحتمالية تعطى بالمعادلة:

$$P(X = x_i) = \frac{e^{-3} 3^x}{x!} ; x = 0, 1, 2, \dots$$

احتمال عدم حدوث أي خطأ $X = 4$

$$P(X = 4) = \frac{e^{-3} 3^4}{4!} = \frac{0.05 \times 81}{24} = \frac{4.05}{24} \\ \approx 0.169 \approx 16.9\%$$

التوزيعات الاحتمالية المتصلة

Continuous Probability Distribution

الدرس الثالث

رابط الدرس الرقمي



www.ien.edu.sa

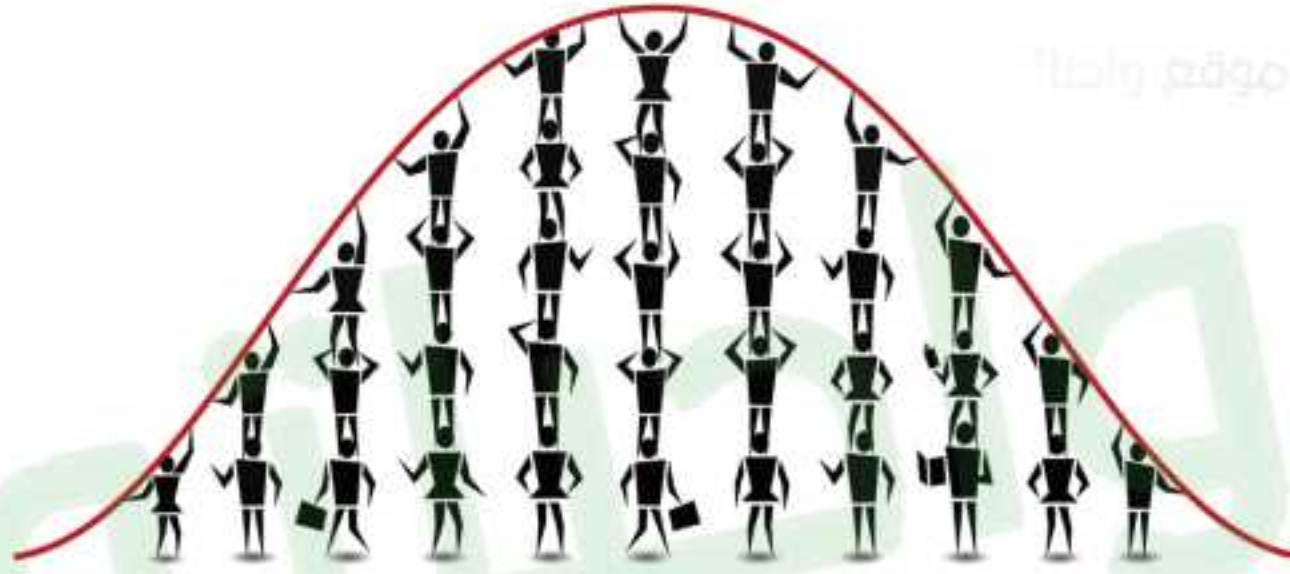
- أتعرف التوزيع الاحتمالي المتصل (التوزيع الطبيعي)، وأوجده، وأفسره لاتخاذ القرارات المناسبة.
- أحسب الاحتمالات باستخدام التوزيع الطبيعي.

في هذا
الدرس



- فكر هل يمكنك تطبيق توزيع احتمالي للمتغير العشوائي المتصل؛ كما هو الحال مع المتغير العشوائي المنفصل؟
- كيف يمكن أن تظهر القيم في الدالة الاحتمالية، وفي تمثيلها البياني؟

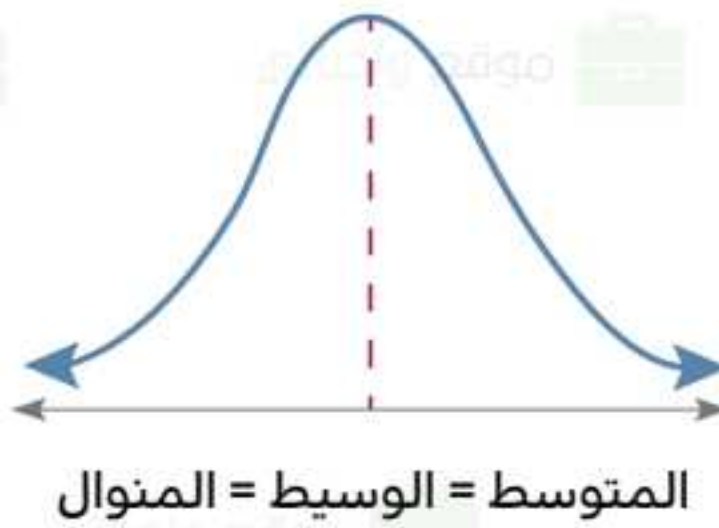
التوزيع الاحتمالي المتصل



هو أن يأخذ المتغير العشوائي المتصل X قيمة صحيحة وكسرية؛ أي أن المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية، ويعطى التوزيع الاحتمالي المتصل بشكل صيغة رياضية تسمى دالة الكثافة الاحتمالية ويرمز لها بالرمز $f(x)$.

ويعد التوزيع الطبيعي أشهر وأهم التوزيعات الاحتمالية المتصلة وأكثرها استخداماً في أغلب الجوانب النظرية والتطبيقية، وله استخدامات متعددة لوصف النمط التكراري للعديد من الظواهر حولنا، مثل درجة الحرارة والطول والكتلة والدخل والأخطاء العشوائية الناتجة عند تحليل الانحدار.

والتوزيع الطبيعي توزيع احتمالي مستمر يتصف بالخصائص الآتية:

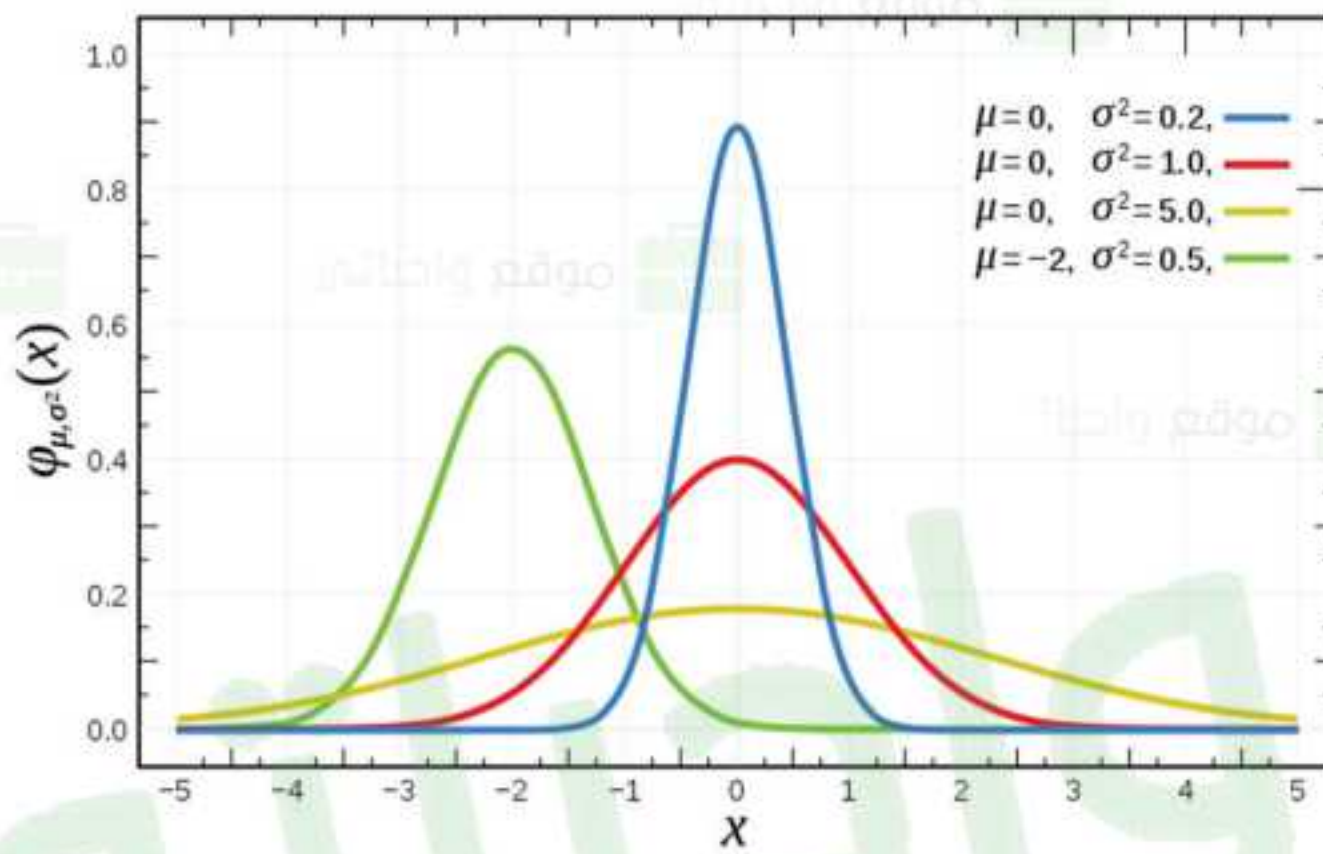


1. يتخذ المنحنى شكل الجرس.
2. يكون المنحنى متماثلاً؛ حيث يقسمه المستقيم الرأسى المار بالوسط؛ إلى قسمين متساويين.
3. تكون المساحة تحت المنحنى (قيمة الاحتمال) تساوي 1.
4. تتساوى عند الخط المستقيم الرأسى المار بالوسط؛ قيمة المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال.
5. يقترب المنحنى من المحور الأفقى X ، ولكنه لا يمسّه ولا يتقاطع معه.

التوزيع الطبيعي (Normal Distribution):

هو عبارة عن معادلة رياضية تحدّ المنحنى. وتعطى صيغة هذه المعادلة بالشكل الآتي:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty ; -\infty < \mu < \infty, \sigma > 0$$



حيث (μ) يمثل المتوسط الحسابي للتوزيع وهو قيمة X المناظرة للقيمة العظمى على المنحنى، أما (σ^2) يمثل التباين ومدى انتشار البيانات في التوزيع. ويوضح الشكل المجاور أثر المتوسط الحسابي والتباين على شكل منحنى التوزيع الطبيعي.

يمكن تسهيل حساب الاحتمال في التوزيع الطبيعي، من خلال تحويله إلى توزيع طبيعي معياري باستخدام جداول خاصة.

التوزيع الطبيعي المعياري (Standard Normal Distribution):

التوزيع الذي يكون متوسطه الحسابي صفر، وتباينه واحد.

نظرية:

إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X هو التوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي μ وتباين σ^2 ، فإنه باستخدام صيغة التحويل: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ ؛ يصبح التوزيع توزيعاً طبيعياً معيارياً.

الجدول المرفق 1 و 2 في الملحق هو الجدول المستخدم في حساب الاحتمالات للتوزيع الطبيعي المعياري.

إثراء

تحويل التوزيع الاحتمالي إلى توزيع طبيعي

يمكن تحويل أي توزيع احتمالي إلى توزيع طبيعي من خلال معرفة الوسط الحسابي والتباين لهذا التوزيع أو البيانات؛ بحيث يكون متوسط وتباين التوزيع الطبيعي هو نفس المتوسط والتباين للتوزيع.

مثال 1

باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري، أوجد كلاً من:

a. نسبة المساحة أقل من $Z = 1.56$ $P(Z < 1.56)$

b. نسبة المساحة أكبر من $Z = 1.20$ $P(Z > 1.20)$

c. نسبة المساحة المحصورة بين $Z = -0.8$ و $Z = 0.15$ $P(-0.8 < Z < 0.15)$

الحل:

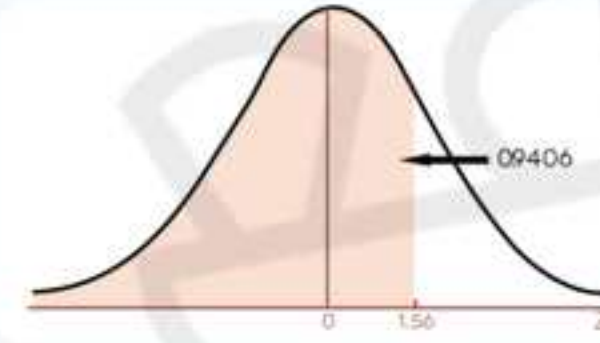
لاحظ:

جدول التوزيع الطبيعي يعطي فقط المساحة التي على يسار Z ، ولأن المساحة تحت المنحنى تساوي الواحد؛ نطرح قيمة الاحتمال الجدولية من الواحد لنحصل على المساحة على يمين Z .

a. إيجاد قيمة الاحتمال $P(Z < 1.56)$ من الجدول المرفق 1 في

الملحق، عن طريق تقاطع الصف 1,5 مع العمود 0,06، فيكون:

$$P(Z < 1.56) = 0.9406$$



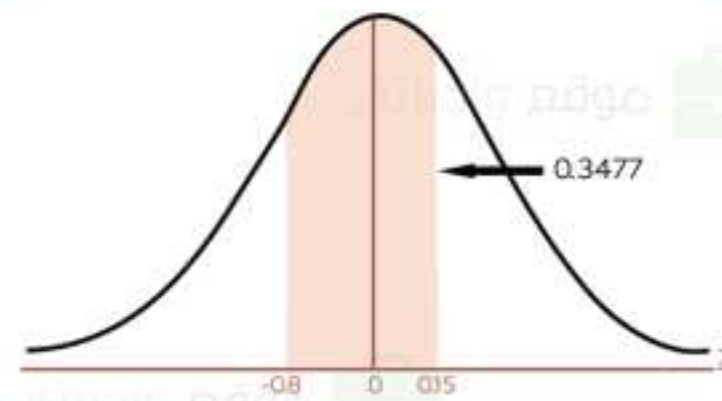
نسبة المساحة أقل من $Z = 1.56$ هي 94.06%

$$b. P(Z > 1.20) = 1 - P(Z \leq 1.20) = 1 - 0.8849 = 0.1151$$

نسبة المساحة أكبر من $Z = 1.20$ هي 11.51%

c. حساب الاحتمال المحصورة بين $Z = -0.8$ و $Z = 0.15$

$$P(-0.8 < Z < 0.15) = P(Z < 0.15) - P(Z < -0.8) = 0.5596 - 0.2119 = 0.3477$$



نسبة المساحة المحصورة بين $Z = -0.8$ و $Z = 0.15$ هي 34.77%

باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري المرفق في الملحق، أوجد كلاً من:

1. نسبة المساحة أقل من $Z = 1.17$. $P(Z < 1.17)$

من خلال البحث في جدول التوزيع الطبيعي

المعياري المرفق رقم (1) مباشرة نجد أن:

$$P(Z < 1.17) = 0.8790 = 87.90\%$$

2. نسبة المساحة أكبر من $Z = -0.50$. $P(Z > -0.50)$

من خلال البحث في جدول التوزيع الطبيعي

المعياري المرفق رقم (2)، مع ملاحظة أن الجدول المرفق

يعطي الاحتمالية التي على يسار قيمة Z (وهذا يعني نسبة

المساحة الأقل من قيمة Z) لذلك نحتاج أن نطرح هذه

القيمة من الواحد؛ حيث إن نسبة المساحة كاملة تحت

المنحنى تساوي 1، عليه نحتاج إلى تطبيق القاعدة

$$P(Z > z) = 1 - P(Z < z)$$

$$P(Z > -0.5) = 1 - P(Z < -0.5)$$

الآن سوف نبحث عن نسبة المساحة التي تقل عن -0.5

وذلك من خلال الجدول المرفق رقم (2) مباشرة.

$$P(Z < -0.5) = 0.3085 = 30.85\%$$

$$P(Z > -0.5) = 1 - 0.3085 = 0.6915$$

مثال 2

أوجد قيمة Z إذا كانت:

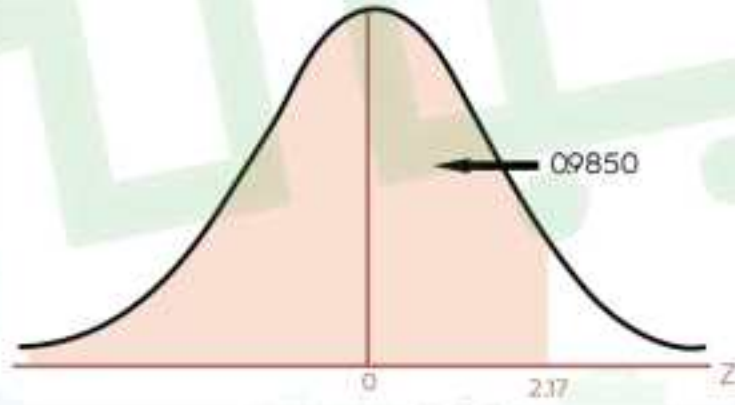
a. نسبة المساحة أقل من Z تساوي 0,9850

$$P(Z < z) = 0.9850$$

b. نسبة المساحة أكبر من Z تساوي 0,6628

$$P(Z > z) = 0.6628$$

الحل:



a. إيجاد قيمة Z من خلال البحث داخل الجدول الطبيعي المعياري للقيم الموجبة (الجدول المرفق 1 في الملحق) عن احتمال 0,9850، فإنها تقع عند تقاطع الصف 2.1 مع العمود الأول 0,07، فتكون $Z = 2.17$ ، كما في الشكل المجاور:

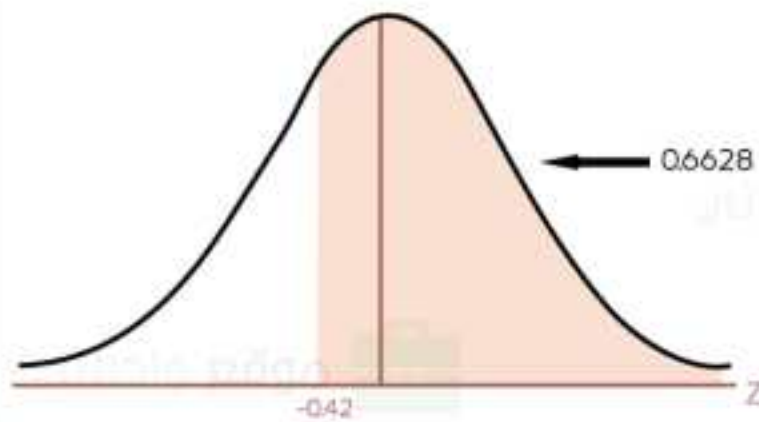
b. إيجاد قيمة الاحتمال الأقل من 0.6628 بطرحها من الواحد لإيجاد الاحتمال يسار قيمة Z .

المساحة أقل من $1 - Z$ = نسبة المساحة أكبر من Z

$$P(Z > z) = 1 - P(Z < z)$$

$$0.6628 = 1 - P(Z < z)$$

$$P(Z < z) = 1 - 0.6628 = 0.3372$$



ثم لإيجاد قيمة Z لابد من البحث داخل الجدول الطبيعي المعياري للقيم السالبة (الجدول المرفق 2 في الملحق) عن 0,3372، فإنها تقع عند تقاطع الصف -0.4 مع العمود الأول 0.02 فتكون $Z = -0.42$ ، كما في الشكل المجاور. فنجد أن $Z = -0.42$

باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري أوجد نسبة المساحة الأقل من Z والتي تساوي 0.9357.

من خلال البحث داخل جدولي التوزيع الطبيعي المعياري المرفق رقم (1)، (2) إذ لدينا في هذه المسألة قيمة الاحتمال، والمطلوب هو إيجاد قيمة Z التي تكون فيها نسبة المساحة أقل، وهذا أيضاً يعد تطبيقاً مباشراً.

ملاحظة مهمة للمعلم: فكرة لتقسيم الجدول لسرعة الحل (إذا كان الاحتمال أكبر من 50% نبحث مباشرة في المرفق (1) وهو الاتجاه الموجب لقيم Z ؛ أما إذا كانت الاحتمالية أقل من 50% فنبحث في الجدول بالاتجاه السالب لقيم Z)

$$P(Z < z) = 0.9357$$

وعليه فإن قيمة $z = 1.52$

مثال 3



إذا كانت درجات 600 طالب في مقررٍ ما تتبع توزيعاً طبيعياً بمتوسط حسابي 72 وانحراف معياري 8، وكانت درجة النجاح هي 60، أوجد:

a. النسبة المئوية للطلاب الذين تقع درجاتهم بين 62، 78.

b. عدد الطلاب الراسبين.

الحل:

a. إيجاد النسبة المئوية للطلاب الذين تقع درجاتهم بين 62، 78:

$$P(62 < X < 78) = P\left(\frac{62 - 72}{8} < Z < \frac{78 - 72}{8}\right) = P(-1.25 < Z < 0.75) \\ = P(Z < 0.75) - P(Z < -1.25) = 0.7734 - 0.1056 = 0.6678$$

إذن نسبة الطلاب الذين تقع درجاتهم بين 62، 78 هي 66.78%

b. إيجاد عدد الطلاب الراسبين:

بما أن أقل درجة للنجاح هي 60 فإن نسبة (احتمال) الطلاب الذين حصلوا على درجة أقل من 60:

$$P(X < 60) = P\left(Z < \frac{60 - 72}{8}\right) = P(Z < -1.50) = 1 - P(Z < 1.50) = 1 - 0.9332 = 0.0668$$

إذن نسبة الطلاب الراسبين تساوي تقريباً 6.68%، ولإيجاد عددهم نتبع الآتي:

$$0.0668 \times 600 = 40.08 \approx 40$$

وهذا يعني أن 40 طالباً - تقريباً - رسبوا في هذا المقرر.



1. من المثال (3) كم عدد الطلاب الحاصلين على درجة 90 فأعلى في المقرر؟
 من معطيات المثال (3) نجد أن المتغير العشوائي يتبع
 التوزيع الطبيعي بالمعلومات الآتية:
 المتوسط الحسابي يساوي 72.
 والانحراف المعياري 8.
 وحجم العينة هو 600 طالباً.

بما أننا نريد عدد الطلاب الحاصلين على درجة 90 فأعلى
 فإن نسبة (احتمال) الطلاب الذين حصلوا على درجة أكبر من
 90:

$$P(X > 90) = P\left(Z > \frac{(90-72)}{8}\right) = P(Z > 2.25) \\ = 1 - P(Z < 2.25) = 1 - 0.9878 = 0.0122$$

إذن نسبة الطلاب الحاصلين على 90 درجة فأعلى في
 المقرر يساوي تقريباً 1.22%، ولإيجاد عددهم نتبع الآتي:

$$0.0122 \times 600 = 7.32 \approx 7$$

وهذا يعني أن 7 طلاب تقريباً حصلوا على 90 فأعلى في
 هذا المقرر.

2. كم عدد الطلاب الناجحين في المقرر؟

بما أننا نريد معرفة عدد الطلاب الناجحين في المقرر ونعلم أن أقل درجة للنجاح هي 60 فإن نسبة (احتمال) الطلاب الذين نجحوا في المقرر لابد ألا تقل درجاتهم عن 60:

$$\begin{aligned} P(X > 60) &= P\left(Z > \frac{(60-72)}{8}\right) = P(Z > -1.50) = 1 - P(Z < -1.50) \\ &= 1 - 0.0668 \\ &= 0.9332 \end{aligned}$$

إذن نسبة الطلاب الناجحين في المقرر الذين تبلغ درجاتهم 60 درجة فأعلى في المقرر يساوي تقريباً 93.32%، ولإيجاد عددهم نتبع الآتي:

$$0.9332 \times 600 = 559.92 \approx 560$$

وهذا يعني أن 560 طالباً تقريباً حصلوا على 60 فأعلى في هذا المقرر وهو ما يمثل عدد الطلاب الناجحين في المقرر.

تقويم ختامي

1: عند إلقاء قطعة نقود معدنية مرتين على التوالي؛ ثم ملاحظة الوجه الظاهر، أوجد الاحتمالات الآتية:

a. ظهور الكتابة مرتين.

b. ظهور الصورة في الرمية الأولى.

c. ظهور الكتابة في الرمية الثانية.

2: تنتج إحدى شركات المشروبات نوعاً معيناً من العصائر؛ يستمر الإنتاج خلال دورتي عمل بحيث إن 70% من الإنتاج اليومي من الدورة الأولى. من دراسة المنتج وجد أن نسبة العبوات السليمة من إنتاج الدورة الأولى 95% ونسبة العبوات السليمة من إنتاج الدورة الثانية 97%. إذا سحبت إحدى العبوات عشوائياً وكانت سليمة فما احتمال أن تكون من إنتاج الدورة الثانية؟

3: صندوق به 10 ثمرات منها 3 تالفة، اختيرت منه ثمرتان. احسب احتمال أن تكون إحدهما تالفة.

4: تتعطل ماكينة لتصنيع الحلوى في المتوسط خمس مرات في الأسبوع. ما احتمال تعطل الماكينة ثلاث مرات خلال أسبوع؟

5: في إحدى المدن الصغيرة وجد أن أعلى درجة حرارة مسجلة يومياً - خلال فصل الربيع - متوسطها 20°C بانحراف معياري 5°C . بفرض أن المتغير العشوائي X (أعلى درجة حرارة يومياً) يخضع للتوزيع الطبيعي، أوجد الاحتمال للأيام التي تكون أعلى درجة حرارة فيها:

a. تتراوح بين 22°C و 26°C

b. على الأقل 28°C

6: إذا أجري استفتاء لمستخدمي شبكة الاتصالات في مدينة الجوف؛ حول البدء بتقديم خدمات الجيل الخامس لسكان المدينة مقابل رسوم إضافية، فأجاب 68% منهم بالموافقة، ورفض 20% وامتنع البقية عن التصويت. فهل يخضع هذا الاستفتاء لتوزيع ذي الحدين؟ فسر إجابتك.

7: إذا كان المتوسط الحسابي لتلف عدد من آلات التصوير هو ثلاث آلات في المستودع الواحد؛ احسب:

a. احتمال عدم حدوث تلف.

b. احتمال حدوث تلفين.

c. احتمال حدوث تلفين على الأقل. تنبيه: استخدم مسلمة الاحتمال الآتية:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1))$$

تطبيقات - مسار الصحة والحياة

• **أطبق المفاهيم والمهارات الاحتمالية في سياقات عملية مرتبطة بالصحة والحياة، باستخدام النظريات والقوانين المناسبة.**

1: في إحدى الجامعات، 6% من الذكور و1% من الإناث أطوالهم أكبر من 180 cm، ونسبة الإناث إلى الذكور في هذه الجامعة هي 2 : 3 (لصالح الإناث). عند اختيار أحد الطلاب بشكل عشوائي من بين الذين أطوالهم أكبر من 180 cm، ما احتمال أن يكون الاختيار أنثى؟

2: إذا كانت نسبة الإصابة بسرطان الرئة بين المدخنين تساوي 4 أمثال النسبة بين غير المدخنين، وبفرض أن نسبة المدخنين في مجتمع ما تساوي 20% وأن نسبة الإصابة بسرطان الرئة تساوي 4%.

a. ما احتمال الإصابة بالسرطان بين المدخنين؟

b. إذا توفي شخص بسرطان الرئة؛ فما احتمال أن يكون مدخناً؟

3: تبلغ نسبة الإصابة بمرض السكري عند البالغين 8%، واحتمال أن يقرر الطبيب إصابة شخص ما بهذا المرض علماً بأنه مريض بالفعل هو 0.9، واحتمال أن يقرر إصابته علماً بأنه غير مصاب هو 0.02. ما احتمال أن يكون شخص بالغ مريضاً بالسكري علماً بأن الطبيب أنبأه بذلك؟

4: عند تشخيص مرض زيد؛ تبين أنه مصاب بنوع معين من الفيروس؛ وليكن X ولكن دون معرفة أي من السلالات a, b, c, d يحملها زيد، وإذا علمت أنه إذا كان المريض حاملاً للفيروس X فإن احتمالات كونه a, b, c, d هي على الترتيب $1/4, 1/8, 1/8, 1/2$. ويبين المختبر أن احتمالات الشفاء من هذا المرض هي $1/2$ إذا كان زيد مصاباً بالنوع a وكان حاملاً لفيروس b فإن احتمال الشفاء هو $1/3$ وإذا كان احتمال الشفاء $1/4$ إذا كان من النوع c وأخيراً احتمال الشفاء $1/3$ إذا كان من النوع d والمطلوب:

a. ما احتمال شفاء زيد من هذا المرض.

b. إذا علمت أنه شفي من هذا المرض فما احتمال أن يكون حاملاً لفيروس من النوع C ؟

5: إذا كان احتمال تحسن جودة الخدمات الطبية في منطقة ما هو $P=0.8$ وذلك بعد توفير البنية التحتية الملائمة، وكان لدى وزارة الصحة خمس مناطق مختلفة، فأوجد ما يأتي:

a. اكتب شكل التوزيع (دالة) للمتغير العشوائي (عدد المناطق التي تحسنت فيها جودة الخدمات الطبية).

b. احسب احتمال تحسن جودة الخدمات الطبية في ثلاث مناطق فقط.

c. احسب احتمال عدم تحسن جودة الخدمات الطبية في أي منطقة.

d. احسب احتمال تحسن جودة الخدمات الطبية فيما لا يقل عن منطقتين ولا يزيد عن أربع مناطق.

e. احسب المتوسط الحسابي، والتباين، والانحراف المعياري، لهذا التوزيع.

6: إذا كان احتمال انتشار فيروس معين في فصل الشتاء يساوي 35%، وكان لدينا 20 شخصًا يعملون في مقر واحد، فما احتمال أن يكون من بينهم ثلاثة أشخاص معرضين للإصابة بهذا الفيروس؟ وما احتمال أن يكون اثنان منهم - على الأكثر - معرضين للإصابة؟

7: إذا كان احتمال معاناة شخص من ردة فعل سيئة عند حقنه بمصل معين هو 0.40:

(a) أوجد احتمال أن يكون ثلاثة أشخاص من بين 15 شخصًا سيحقنون بالمصل لهم ردة فعل سيئة.

(b) أوجد احتمال أن يكون أكثر من شخص من بين 15 شخصًا سيحقنون بالمصل لهم ردة فعل سيئة.

a. ثلاثة أشخاص.

b. أكثر من شخص.

c. ما المتوسط الحسابي لردود الفعل السيئة.

8: إذا علمت أن احتمال استصلاح أراضٍ زراعية بجهود فردية من المزارعين خلال عام واحد يبلغ 0.6، فإذا كان لدينا 10 أراضٍ زراعية، فما احتمال ما يأتي:

a. استصلاح ثلاث أراضٍ خلال عام.

b. استصلاح من 2 إلى 5 أراضٍ خلال عام.

c. عدم استصلاح أي أرض منها خلال عام.

9: إذا كان احتمال عدد الأشخاص في العالم الذين لديهم عيون بنفسجية يبلغ 0.001، فإذا كان لدينا 25 شخصًا،

فما احتمال أن يكون من بينهم ثلاثة ذوو عيون بنفسجية اللون؟ وما احتمال أن يكون واحد منهم على الأقل ذا عين بنفسجية اللون؟

10: إذا كان المتوسط الحسابي لعدد الولادات في مستشفى الحرس الوطني ثلاث ولادات كل ساعة، فما احتمال أن يكون هناك:

a. حالة ولادة واحدة خلال ساعة معينة.

b. أربع حالات ولادة على الأكثر خلال ساعة معينة.

11: إذا كان احتمال تحسن نوعية حليب الأبقار في مزرعة ألبان هو 0.001 عند تلقيحها بأمصال معينة، فأوجد احتمال أن يكون من بين 2000 بقرة سيتم حقنها بالمصل:

a. ثلاث بقرات ستتحسن نوعية حليبها.

b. أكثر من بقرة ستتحسن نوعية حليبها.

(ملاحظة: في حال كان لتوزيع ذي الحدين احتمال P صغير جداً وحجم عينة n كبير، فإنه يمكن تقريبه إلى توزيع بواسون من خلال $\lambda=np$).

12: إذا كان للمتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الأشعات - من نوع خاص - التي يعملها أحد مراكز الأشعة خلال ساعة؛ توزيع بواسون 2.3؛ فالمطلوب:

a. اكتب شكل التوزيع الاحتمالي (دالة الكتلة الاحتمالية) للمتغير العشوائي X .

b. احسب احتمال أن يعمل المركز 3 أشعات خلال ساعة.

c. احسب احتمال أن يعمل المركز أشعتين على الأقل خلال ساعة.

d. أوجد المتوسط الحسابي لعدد الأشعات التي يعملها المركز خلال ساعة.

e. أوجد الانحراف المعياري لعدد الأشعات التي يعملها المركز خلال ساعة.

13: إذا كان متوسط نمو التطبيقات الصحية السنوي في المملكة العربية السعودية هو 5 تطبيقات، فما احتمال أن يصل عدد التطبيقات إلى 3 تطبيقات هذا العام؟

14: المتوسط الحسابي لأوزان 1000 شخص يساوي 65 kgm، والانحراف المعياري 10 kgm، فإذا كانت الأوزان تتبع التوزيع الطبيعي، فما نسبة الأشخاص الذين تقع أوزانهم بين 65 kgm و 95 kgm؟ وما عددهم؟

15: يتوزع مستوى الدهون (الكوليسترول) في فئة الشباب الذكور، في إحدى الدول، توزيعاً طبيعياً؛ بمتوسط حسابي 158.3، وانحراف معياري 6.6:

a. ما احتمال أن تقل نسبة الكوليسترول لدى الشباب الذكور عن 151.7؟

b. كم شخصاً تقريباً من بين 900 شخص يتراوح مستوى الكوليسترول لديهم بين 145.1 - 171.5؟

16: إذا كانت حموضة الدم الأدمي - مقاسة بدلالة الأس الأيدروجيني - متغيراً عشوائياً طبيعياً متوسطه الحسابي $\mu=7.2$ وكان احتمال أن يكون مستوى الأس الأيدروجيني أكبر من 7.5 يساوي 0.0222، فأوجد الانحراف المعياري للتوزيع.

تطبيقات - مسار إدارة الأعمال

• أطبق المفاهيم والمهارات الاحتمالية في سياقات عملية مرتبطة بإدارة الأعمال، باستخدام النظريات والقوانين المناسبة.

1: مصنع به ثلاث ماكينات A, B, C وإذا كانت الماكينة A تنتج 20% من الإنتاج، والماكينة B تنتج 30% من الإنتاج، والماكينة C تنتج 50% من الإنتاج، وكانت نسبة الإنتاج المعيب للماكينات الثلاث على الترتيب هي 4% و3% و2%، فإذا اختيرت وحدة من الإنتاج بشكل عشوائي، احسب الاحتمالات الآتية:

a. أن تكون الوحدة المسحوبة من الإنتاج معيبة.

b. إذا كانت الوحدة المسحوبة معيبة؛ أن تكون من إنتاج الماكينة B.

2: قامت إدارة الموارد البشرية في شركة بالإعلان عن توفر وظائف في الشركة، وقد أشارت نتائج الفرز المبدئي إلى: أن نسبة المتقدمين من حملة المؤهلات هي: الدبلوم 35%، البكالوريوس 55%، أما الماجستير فقد بلغت 10%، كما أشارت نتائج الفرز إلى: أن نسبة من يملكون خبرة سابقة من المتقدمين هي 8% و9% و2% على التوالي من حملة المؤهلات، فإذا قررت الشركة اختيار موظف من المتقدمين بشكل عشوائي، فاحسب الاحتمالات الآتية:

a. أن يكون الاختيار معتمداً على الخبرة؟

b. إذا كان المتقدم الذي جرى اختياره لديه خبرة؛ فما احتمال أن يكون من حملة درجة البكالوريوس؟

3: تستخدم شركة تصنيع أربع خطط تحليلية لتصميم وتطوير منتج محدد، لأسباب اقتصادية في أوقات مختلفة، حيث تستخدم الخطط: الأولى والثانية والثالثة والرابعة بنسبة 30%، 20%، 35%، 15% على الترتيب، ومعدل الخلل في هذه الخطط يختلف كما يأتي:

$$P(D|P_1)=0.01, \quad P(D|P_2)=0.03, \quad P(D|P_3)=0.02, \quad P(D|P_4)=0.015$$

حيث إن $P(D|P_i)$ هي احتمال أن يكون المنتج معيباً، علماً بأنه جرى استخدام الخطة j.

إذا جرى رصد منتج ووجد أنه معيب، ما الخطة الأكثر احتمالاً أن تكون المستخدمة؛ وبالتالي مسؤولة عن العيب؟

4: إذا كان احتمال ارتفاع مؤشر سوق الأسهم هو $(3/4)$ واختيرت ثلاث دول، أوجد:

a. التوزيع الاحتمالي لعدد الدول التي يرتفع مؤشر سوق أسهمها.

b. متوسط التوزيع وتباينه وانحرافه المعياري.

c. احتمال ارتفاع مؤشر سوق الأسهم لدولتين على الأقل.



5: في شركة لتعبئة المنتجات الزراعية؛ احتمال أن يكون أحد الصناديق المعبأة فيه سلع تالفة هو 0.3، واخترنا عينة من 4 صناديق، وكان التوزيع الاحتمالي لعدد الصناديق السليمة X كما هو موضح في الجدول الآتي:

عدد الصناديق السليمة X	0	1	2	3	4
الاحتمال $P(X = x_i)$	0.0081		0.2646		0.2401

a. اذكر اسم التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X واكتب دالته الاحتمالية.

b. استكمل البيانات الناقصة في الجدول.

c. احسب متوسط التوزيع وتباينه.

d. احسب احتمال الحصول على 3 صناديق على الأقل فيها سلع تالفة.

6: قدرت شركة للطيران أن احتمال وصول طائرتها التي تقلع من لندن متجهة إلى جدة في موعدها هو 0.8، فإذا أقلعت 4 طائرات لهذه الشركة من مطار لندن متجهة إلى جدة؛ فأوجد:

a. التوزيع الاحتمالي لعدد الطائرات التي تصل في مواعيدها.

b. متوسط عدد الطائرات التي تصل في مواعيدها، وكذلك الانحراف المعياري.

c. احتمال وصول طائرة واحدة على الأقل في موعدها.

d. احتمال وصول 3 طائرات على الأقل في مواعيدها.

7: إذا كانت نسبة التالف من المصابيح الكهربائية في مصنع تساوي 0.001 وأخذت عينة حجمها 10 مصابيح بطريقة عشوائية، فما احتمال أن يكون عدد المصابيح التالفة في هذه العينة صفراً؟ وما احتمال أن يكون اثنين؟

8: في مصنع لإنتاج السيارات؛ يوجد من بين كل 500 سيارة 50 سيارة أي غير صالحة للاستعمال، وسحبت عينة مكونة من 4 سيارات من إنتاج ذلك المصنع؛ أوجد احتمال أن يكون من بينها ثلاث سيارات غير صالحة للاستعمال.

9: إذا كان عدد البواخر التي تصل إلى ميناء ما في اليوم يتبع توزيع بواسون بمتوسط باخرتان، وكانت التسهيلات في الميناء تستطيع خدمة ثلاث باواخر فقط في اليوم، وإذا زاد العدد عن ذلك تقوم إدارة الميناء بتحويل البواخر إلى ميناء آخر. فما احتمال أن تقوم إدارة الميناء في أحد الأيام بتحويل باواخر إلى الميناء الآخر.

10: إذا كان متوسط عدد الداخلين إلى محل تجاري خلال دقيقة هو 3 زبائن؛ أوجد الاحتمالات الآتية:

a. عدم دخول أي زبون خلال دقيقة معينة.

b. دخول 4 زبائن فقط خلال دقيقة واحدة.

11: إذا كان X هو عدد المراجعين الذي يستقبلهم قسم إدارة الموارد البشرية خلال يوم واحد، متغيراً عشوائياً له توزيع بواسون بمتوسط 7 مراجعين؛ فالمطلوب:

a. اكتب شكل التوزيع الاحتمالي (دالة الكتلة الاحتمالية) للمتغير العشوائي X .

b. احتمال أن يستقبل القسم 4 مراجعين خلال اليوم الواحد.

c. احتمال ألا يستقبل القسم أي مراجع خلال اليوم الواحد.

d. التباين الخاص بعدد المراجعين للقسم خلال اليوم الواحد.

12: إذا كان متوسط عدد الشركات الأسبوعية على مؤشر زيادة سوق الأسهم المحلي هو 3 شركات؛ فما احتمال أن يزيد المؤشر في أحد الأسابيع لشركتين.

13: إذا كانت أعمار المصابيح الكهربائية تتبع توزيعاً طبيعياً متوسطه μ يساوي 100 ساعة وانحرافه المعياري σ يساوي 8 ساعات، واخترنا مصباحاً عشوائياً؛ فما احتمال أن:

a. يزيد عمره عن 116 ساعة.

b. يتراوح عمره بين 90 و120 ساعة.

14: تستعمل آلة لتعبئة عبوات بالمياه المعدنية، حيث تختلف كمية الماء اختلافاً ضئيلاً بين العبوات. إذا كان حجم الماء في 120 عبوة يتبع توزيعاً طبيعياً بمتوسط حسابي 1.1 لتر، وانحراف معياري 0.02 لتر، فأجب عما يأتي:

a. كم عبوة تقريباً يكون حجم الماء فيها أقل من 1.06 لتر؟

b. ما احتمال أن يكون حجم الماء في العبوات بين 1.08 لتر و1.14 لتر؟

15: إذا كانت الأجور الأسبوعية للعاملين في أحد المصانع موزعةً طبيعياً بمتوسط 210 دولارات، وانحراف معياري مقداره 10 دولارات. أوجد احتمال الاختيار العشوائي لعامل يتراوح أجره بين 184 و233 دولاراً.

16: إذا كان مؤشر إغلاق سوق الأسهم يتبع توزيعاً طبيعياً متوسطه 6000 نقطة وانحرافه المعياري 1000 نقطة، فأوجد احتمال أن يتراوح مؤشر إغلاق السوق بين 5700 و6100 نقطة.



صمّم استبانة إلكترونية في مسارك التخصصي تتطلب الإجابة عن سؤال محدد لطلاب مدرستك؛ على أن يكون حساب احتمال نتائج السؤال تطبيقاً على توزيع ذي الحدين:

a. مثل نتائج الاستبيان تقنياً باستخدام تمثيل بياني مناسب، وبرر سبب اختيار هذا النوع من التمثيل البياني.

b. إذا كان المتغير العشوائي X يدل على عدد الطلاب الذين كانت إجاباتهم عن هذا السؤال بنعم؛ حدد نوع المتغير العشوائي ومن ثم اكتب دالته الاحتمالية.

c. إذا كان المتغير العشوائي Y يدل على عدد الطلاب الذين كانت إجاباتهم عن هذا السؤال بلا؛ اكتب دالته الاحتمالية.

d. أوجد الانحراف المعياري، مع تفسير القيمة التي تم الحصول عليها.

e. لنفرض أنه تمت زيادة حجم العينة إلى 1000 طالب وكان المتغير العشوائي Y يدل على عدد الطلاب الذين كانت إجاباتهم عن هذا السؤال بلا، وحيث إنه عند زيادة حجم العينة أصبحت نسبة الطلاب الذين أجابوا بلا هي 0.005. في هذه الحالة هل يفضل استخدام توزيع ذي الحدين أم توزيع بواسون؟ مع ذكر السبب وكتابة صيغة التوزيع.

الملحق

المرفق 1: جدول التوزيع الطبيعي المعياري لقيم Z الموجبة.

Table entry for z is the area under the standard normal curve to the left of z.

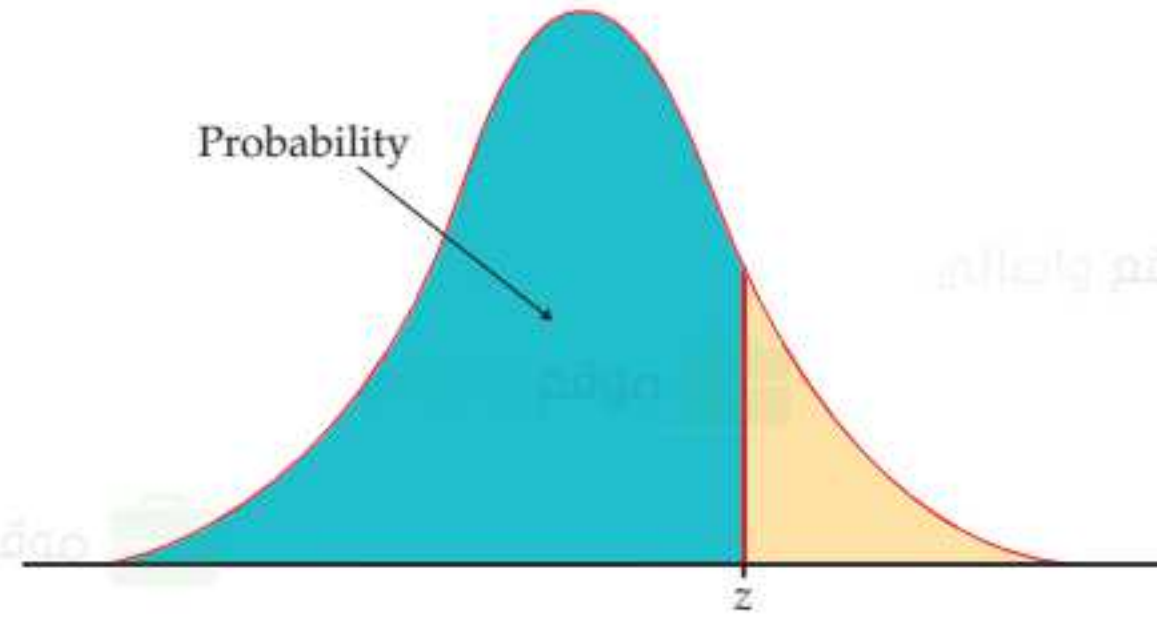


TABLE A

Standard normal probabilities (continued)

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998



المرفق 2: جدول التوزيع الطبيعي المعياري لقيم Z السالبة.

Table entry for z is the area under the standard normal curve to the left of z .

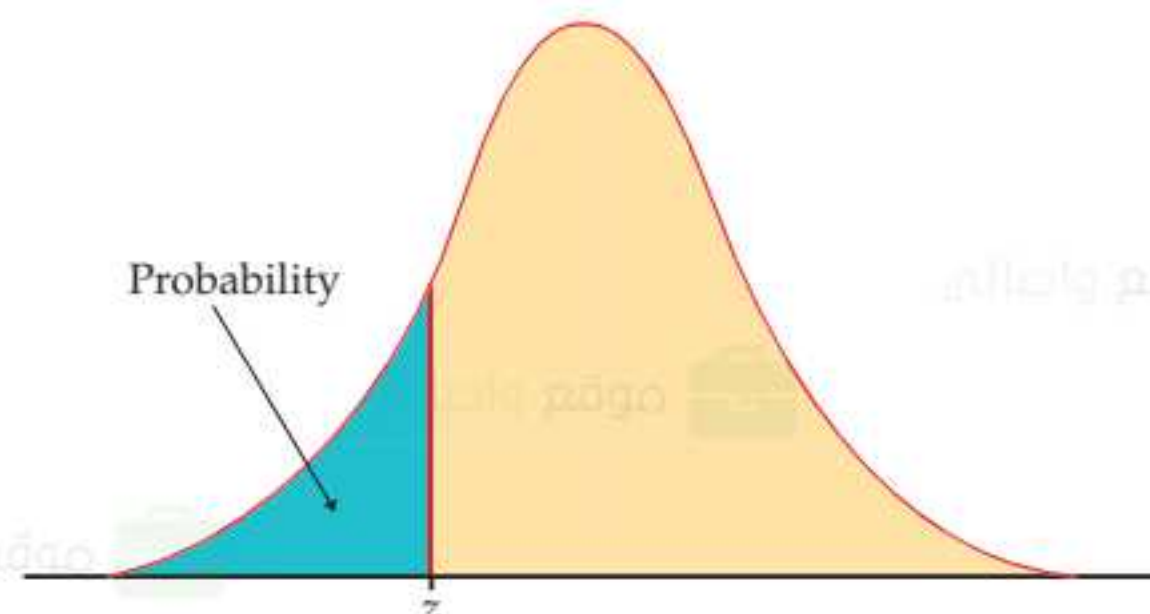


TABLE A

Standard normal probabilities

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002
-3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003
-3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005
-3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007
-3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010
-2.9	.0019	.0018	.0018	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
-2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
-2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
-2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
-2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
-2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
-2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
-2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
-2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
-2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
-1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
-1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
-1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
-1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
-1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
-1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
-1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
-1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
-1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
-1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
-0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
-0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
-0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
-0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
-0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
-0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
-0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
-0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
-0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641